Teoria miary i całki
SPPI IIr. semestr zimowy 2006/7
LISTA 4

16/10/06

Zadanie 0
Udowodnij, że na prostej sigma ciało Borelowskie $\mathcal{B}$ spełnia

$$\mathcal{B} = \sigma(\{(a,b) : a < b\}) = \sigma(\{[a,b] : a \leq b\}) = \sigma(\{[a,b) : a < b\}) = \sigma(\{[a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}).$$

Zadanie 1
Udowodnij, że w przestrzeni metrycznej każdy zbiór domknięty jest typu G_δ (a otwarty - F_σ).

Zadanie 2
Sprawdź, że następujące zbiory na prostej są borelowskie:
a) $[a,b)$,
b) dowolny zbiór przeliczalny,
c*) zbiór liczb, które w rozwinięciu dziesiętnym mają po przecinku nieskończenie wiele razy cyfrę 7.

Zadanie 3
Czy zbiór

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\sqrt{n} + IQ)$$

jest gęsty?

Zadanie 4
Niech $\overline{\mu}$ będzie miarą zewnętrzną na 2^X. Udowodnij, że
1. Dla dowolnego ciągu wstępującego zbiorów (A_n), $\overline{\mu}(\bigcup A_n) \geq \lim \overline{\mu}(A_n)$.
2. Jeśli $\overline{\mu}$ jest na jakimś σ-ciele skończenie addytywna, to jest na nim przeliczalnie addytywna.

Zadanie 5
Na prostej określamy miarę zewnętrzną $\overline{\lambda}$ następująco:
1. $\lambda(a,b)) = b - a$
2. $\lambda(\dot{\bigcup}_n(a_n,b_n)) = \sum_n(b_n - a_n)$ (to określa tą miarę λ na wszystkich zbiorach otwartych U)
3. $\overline{\lambda}(A) = \inf\{\lambda(U) : U$ otwarty, $U \supset A\}$ dla dowolnego A.

a) Sprawdź, że $\overline{\lambda}(U) = \lambda(U)$ dla U otwartego.
b) Sprawdź przeliczalną podaddytywność na zbiorach otwartych.
WSK. Sprawdź, że $\lambda(U) \leq \sum_n(b_n - a_n)$ jeśli $U \subset \bigcup_n(a_n,b_n)$ (suma niekoniecznie rozłączna).